УДК 62.50

КОНТРОЛЬ ЗАТРАТ НА УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ВОСПРОИЗВЕДЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЭКЗОГЕННЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ: ГРАМИАННЫЙ ПОДХОД

Д.С. Бирюков, А.В. Ушаков

Ставится задача контроля затрат управления при воспроизведении синтезируемой системой гармонических экзогенных воздействий с использованием грамианного подхода. Грамианный подход сформировался в рамках современной теории управления, опирающейся на векторно-матричный формализм метода пространства состояния. Подход аналитически устанавливает прямую связь установившейся составляющей движения технического объекта (ТО) в составе синтезируемой системы по выходу с вектором начального состояния источника гармонических экзогенных воздействий, причем эта связь осуществляется через матрицу подобия, являющуюся решением матричного уравнения Сильвестра. Задача получает прозрачное решение на сфере начальных состояний источника гармонических экзогенных воздействий в виде мажоранты и миноранты затрат управления как функции распределения мод, которое доставляется системе, образованной ТО и регулятором, при синтезе системы.

Ключевые слова: источник гармонического экзогенного воздействия, вектор начального состояния, объект управления, установившаяся составляющая, грамиан затрат управления, минорантная и мажорантная оценки.

Введение. Постановка задачи

Грамианные структуры в настоящее время активно используются отечественными и зарубежными специалистами для решения задач оптимального размещения управляющих органов и датчиков [1], оценки межканальных связей [2], редуцирования моделей динамических объектов [3], синтеза управляющих воздействий [4]. Авторы данной работы решают проблему оценки затрат на управление с использованием грамианного подхода. Предлагаемая вниманию работа развивает научные положения, изложенные авторами в [5, 6]. Суть их состояла в том, что формирование желаемой структуры мод сопровождалось контролем затрат управления на сфере начальных состояний технического объекта (ТО) для множества возможных желаемых структур мод при условии выполнения отношения порядка применительно к длительности переходного процесса и возможного перерегулирования [7]. В работе [6] задача была проблемно расширена и сформулирована как задача контроля затрат управления при воспроизведении синтезируемой системой гармонических экзогенных воздействий с использованием грамианного подхода. В настоящей работе исследуется случай воспроизведения синтезируемой системой гармонических экзогенных воздействий. Грамианный подход сформировался в рамках современной теории управления, опирающейся на векторно-матричный формализм метода пространства состояния [8]. Подход устанавливает аналитическую связь компонентов движения ТО в составе синтезируемой системы по выходу и вектора начального состояния источника гармонического экзогенного воздействия. При этом наибольший практический интерес в решаемой задаче представляет установившаяся составляющая движения ТО. Алгоритмически указанная выше связь опирается на концепцию векторно-матричного подобия, матрица которого является решением матричного уравнения Сильвестра. Выход на оценку затрат управления при воспроизведении системой установившегося движения по выходу опирается на формирование закона управления, записанного в аддитивной форме, одна часть которого доставляет системе требуемое качество воспроизведения гармонического экзогенного воздействия, а вторая – требуемое качество выхода системы на установившуюся составляющую движения. Очевидно, в установившемся режиме в законе управления остается только первая его составляющая, что позволяет связать управление с начальным состоянием источника гармонического экзогенного воздействия. Финальный этап алгоритма решения задачи, вынесенной в название данной работы, состоит в формировании грамиана затрат управления с использованием матричного уравнения Ляпунова с последующим сингулярным разложением грамиана и выделением на алгебраическом спектре его сингулярных чисел минимального и максимального компонентов (миноранты и мажоранты). Выделение соответствующих этим компонентам алгебраического спектра сингулярных чисел левого сингулярного базиса завершает решение задачи, придавая ей геометрическую трактовку в виде портрета затрат управления.

Связь движения динамической системы с начальным состоянием источника гармонического экзогенного воздействия

Рассмотрим объект управления (ОУ)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(t)\big|_{t=0} = x(0), \quad \varepsilon(t) = g(t) - y(t). \tag{1}$$

Источник конечномерного экзогенного воздействия описывается как

$$\dot{z}(t) = Ez(t), \quad z(t)\big|_{t=0} = z(0), \quad g(t) = Pz(t). \tag{2}$$

Для источника гармонического воздействия матрицы E, P и $z(0)$ имеют вид

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, z(0) = \begin{bmatrix} z_1(0) & z_2(0) \end{bmatrix}^T,$$

а выход источника становится равным $g(t) = z_1(0)\cos\omega t = z_2(0)\sin\omega t$.

Для ОУ требуется синтезировать закон управления (ЗУ), обеспечивающий в замкнутой системе требуемое распределение мод и соответствия выхода системы в установившемся режиме задающему воздействию

$$u(t) = u_\lambda(t) + u_g(t) = K_g g(t) - Kx(t). \tag{3}$$

Объединением ОУ и ЗУ получим систему управления (СУ):

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), \quad y(t) = Cx(t), \tag{4}$$

где

$$F = A - BK, \quad G = BK_g. \tag{5}$$

Сконструируем агрегированную систему с вектором состояния $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & z^T(t) \end{bmatrix}^T$, для которой справедливо представление

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fx(t) + GPz(t) \\ 0 \cdot x + Ez(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & GP \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \tilde{F}\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ z(0) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Решение системы (6) в явной форме принимает вид

$$\tilde{x}(t) = e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0). \tag{7}$$

Получим ряд выражений для компонентов исходной системы через компоненты агрегированной системы:

$$x(t)=Ix(t)+0z(t)=[I\quad 0]\tilde{x}(t),\quad x(t)=\tilde{C}_x\tilde{x}(t)=\tilde{C}_x e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0), \tag{8}$$

$$y(t)=Cx(t)+0z(t)=[C\quad 0]\tilde{x}(t),\quad x(t)=\tilde{C}_y\tilde{x}(t)=\tilde{C}_y e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0), \tag{9}$$

$$\varepsilon(t)=-Cx(t)+Pz(t)=[-C\quad P]\tilde{x}(t),\quad x(t)=\tilde{C}_\varepsilon\tilde{x}(t)=\tilde{C}_\varepsilon e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0), \tag{10}$$

$$z(t)=0x(t)+Iz(t)=[0\quad I]\tilde{x}(t),\quad x(t)=\tilde{C}_z\tilde{x}(t)=\tilde{C}_z e^{\tilde{F}t}\tilde{x}(0). \tag{11}$$

Для цели дальнейших исследований сформулируем утверждение.

Утверждение 1. Если матрицы F, E, G, P связаны уравнением Сильвестра

$$TE-FT=GP, \tag{12}$$

то матричная экспонента $e^{\tilde{F}t}$ представима в форме

$$e^{\tilde{F}t}=\begin{bmatrix} e^{Ft} & Te^{Et}-e^{Ft}T \\ 0 & e^{Et}\end{bmatrix}. \quad \square \tag{13}$$

Доказательство утверждения приведено в [9]. ■

Пользуясь выражением (13), для движения агрегированной системы можно записать

$$\tilde{x}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{Ft} & Te^{Et}-e^{Ft}T \\ 0 & e^{Et}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ z(0)\end{bmatrix}. \tag{14}$$

Тогда уравнения движения замкнутой системы (4) приобретают вид

$$x(t)=e^{Ft}x(0)+\left(Te^{Et}-e^{Ft}T\right)z(0),\quad y(t)=Cx(t). \tag{15}$$

Представление (15) для вектора состояния $x(t)$ позволяет выделить в движении системы по этому вектору свободную, вынужденную, установившуюся и переходную составляющие:

$$x_{\text{св}}(t)=e^{Ft}x(0), \tag{16}$$

$$x_{\text{в}}(t)=\left(Te^{Et}-e^{Ft}T\right)z(0), \tag{17}$$

$$x_{\text{у}}(t)=\lim_{t\to\infty}x_{\text{в}}(t)=Te^{Et}z(0), \tag{18}$$

$$x_{\text{пер}}(t)=x_y(t)-x_{\text{в}}(t)=e^{Ft}Tz(0). \tag{19}$$

Для цели дальнейших исследований в силу постановки задачи сосредоточим внимание на установившейся составляющей движения. Очевидно, что движение в установившемся режиме системы (4) зависит от решения уравнения Сильвестра (12) относительно матрицы T, матрицы состояния E источника гармонического экзогенного воздействия и его вектора начального состояния $z(0)$.

С тем, чтобы наполнить содержанием матрицу T, формально являющуюся решением уравнения Сильвестра (12), сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2. Матрица T – решение уравнения Сильвестра (12) – представляет собой матрицу подобия, связывающую установившуюся составляющую $x_y(t)$ движения системы и свободное движение $z(t)$ источника гармонического экзогенного воздействия (2). □

Доказательство. Для свободного движения источника гармонического экзогенного воздействия в силу (2) можно записать:

$$z(t)=z\{t,z(0)\}=e^{Et}z(0),\quad g(t)=Pz(t)=Pe^{Et}z(0). \tag{20}$$

Сопоставляя (18) и (20) для вектора $z(t)$, можно записать

$$x_y(t)=Tz(t). \quad ■ \tag{21}$$

Основной результат. Грамиан затрат на управление, минорантные и мажорантные эллипсоидные оценки

Для оценки затрат на управление рассмотрим вектор управления $u(t)$ (3) в установившемся режиме, так что $x(t)=x_y(t)$. Тогда с учетом (18) и (20) для вектора $g(t)$ вектор управления $u(t)$ (3) представим в форме

$$u(t)=K_g g(t)-Kx_y(t)=K_g Pe^{Et}z(0)-KTe^{Et}z(0)=\left(K_g P-KT\right)e^{Et}z(0). \tag{22}$$

Сформируем грамиан затрат на управление по схеме, изложенной в [5].

$$\left\|U_{[0,t)}\right\|^2=\int_0^t U^T(\tau)U(\tau)d\tau=z^T(0)W_U(t)z(0), \tag{23}$$

где

$$W_U(t)=\int_0^t e^{E^T\tau}\left(K_gP-KT\right)^T\left(K_gP-KT\right)e^{E\tau}d\tau. \quad (24)$$

При $t\to\infty$ становится справедливым представление

$$\lim_{t\to\infty}W_U(t)=W_U. \quad (25)$$

Тогда для затрат на управление при $t\to\infty$ можно записать

$$\lim_{t\to\infty}\left\|U_{[0,t)}\right\|^2=\left\|U_{[0,\infty)}\right\|^2=z^T(0)W_Uz(0). \quad (26)$$

В выражениях (25) и (26) матрица W_U именуется грамианом затрат на управление.

Для цели алгебраизации задачи сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 3. Грамиан W_U затрат на управление удовлетворяет матричному уравнению Ляпунова

$$E^TW_U+W_UE=-\left(K_gP-KT\right)^T\left(K_gP-KT\right). \quad \square(27)$$

Доказательство утверждения строится по схеме, приведенной в [1], дополненной процедурой экспоненциальной регуляризации, состоящей в использовании приближенного равенства $s\cong s+\varepsilon$, где ε – бесконечно малая величина, максимально приближенная к «машинной ε», в соответствии с чем грамиан $W_U=\lim\limits_{t\to\infty}\left(W_U(t)\right)$ удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$W_UE+E^TW_U=-\left(K_gP-KT\right)^T\left(K_gP-KT\right).$$

При наличии грамиана W_U в силу выражения (24) можно осуществить оценку затрат $\left\|U\right\|_\infty$ на управление установившимся движением системы на сфере начальных состояний источника гармонического экзогенного воздействия $\left\|z(0)\right\|=const$ в форме мажоранты $\left\|U_{[0,\infty)}\right\|_M$ и миноранты $\left\|U_{[0,\infty)}\right\|_m$ с использованием сингулярного разложения грамиана W_U в форме

$$\alpha_m^{1/2}\{W_U\}\left\|z(0)\right\|=\left\|U_{[0,\infty)}\right\|_m\le\left\|U_{[0,\infty)}\right\|=\left(z^T(0)W_Uz(0)\right)^{1/2}\le\left\|U_{[0,\infty)}\right\|_M=\alpha_M^{1/2}\{W_U\}\left\|z(0)\right\|, \quad (28)$$

где $\alpha_m\{W_U\}$, $\alpha_M\{W_U\}$ – соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа грамиана W_U.

Таким образом, контроль затрат на управление при конечномерном экзогенном воздействии может быть осуществлен с использованием следующего алгоритма.

Алгоритм.

1. Сформировать векторно-матричное описание (ВМО) объекта управления в форме (1).
2. Задать источник конечномерного (гармонического) экзогенного воздействия с помощью ВМО в форме (2).
3. Сформировать требования к качеству процессов проектируемой системы в переходном и установившемся режиме для случая источника конечномерного экзогенного воздействия вида (2), отобразив их на структуру мод матрицы состояния системы, назначив их носителем матрицу Γ состояния модальной модели, задаваемой наблюдаемой парой матриц $\left(\Gamma,H:\dim H=\dim B^T\right)$.
4. Сформировать матрицу K обратной связи по вектору состояния ОУ закона управления (ЗУ) (3) методами модального управления в форме $K=HM^{-1}$, где M – матрица подобия отношения $M\Gamma=FM$ – ищется из уравнения Сильвестра

$$M\Gamma-AM=-BH. \quad (29)$$

5. Сформировать матрицу прямых связей K_g по вектору экзогенного воздействия $g(t)$ из условия единичного замыкания системы, приводящего к соотношению

$$K_g=\arg\left\{\Phi(s)\big|_{s=0}=C(sI-F)^{-1}BK_g=I\right\}=-\left(CF^{-1}B\right)^{-1}.$$

6. Решить уравнение Сильвестра (12) относительно матрицы T.
7. Решить уравнение Ляпунова (27) относительно грамиана W_U.
8. Построить оценки затрат на управление системой в установившемся режиме при заданном экзогенном воздействии в форме мажорант и минорант этих затрат с использованием соотношения (28).
9. Провести анализ полученных оценок. Вернуться в пункт 3 алгоритма с целью модификации структуры мод. Из процедуры выйти по достижении минимальных значений мажоранты $\left\|U_{[0,\infty)}\right\|_M$.

Примечание 1.

Пункт 6 алгоритма можно задать в явном виде с учетом вида матрицы E.

Запишем матрицу T в столбцовой форме:

$T = [T_1 \quad T_2]$.

Тогда уравнение (12) примет вид:

$[-T_2\omega \quad T_1\omega] - F[T_1 \quad T_2] = [G \quad 0]$,

а столбцы матрицы T можно задать в виде следующих выражений:

$$T_1 = -\frac{1}{\omega} F \left(WI + \frac{1}{\omega} F^2 \right)^{-1} G;$$

$$T_2 = -\left(WI + \frac{1}{\omega} F^2 \right)^{-1} G.$$

Примечание 2.

Нетрудно видеть, что матрица e^{Et} в силу своей структуры

$$e^{Et} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

является ортогональной, и поэтому умножение на нее произвольных матриц слева и справа не меняет спектр сингулярных чисел сомножителя, а произведения $e^{E^T t} e^{Et}$ и $e^{Et} e^{E^T t}$ совпадают. Это наблюдение позволяет по-новому взглянуть на выражения (21)–(24) для вычисления грамиана затрат на управление.

Пример

Рассмотрим исходную неустойчивую систему:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0].$$

Источник гармонического воздействия зададим следующим образом:

$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; P = [1 \quad 0]$. Таким образом, $\omega = 2$.

Оценим затраты на перевод системы из начального состояния $x(0) = [1 \quad 1]^T$ в начало координат с условием, что желаемые моды синтезируемой устойчивой системы находятся на единичной сфере. Изменяя структуру мод, можем найти оптимальный с точки зрения затрат на управление набор желаемых мод.

Моделирование представленной задачи в среде MATLAB дает результаты, представленные на рисунке.

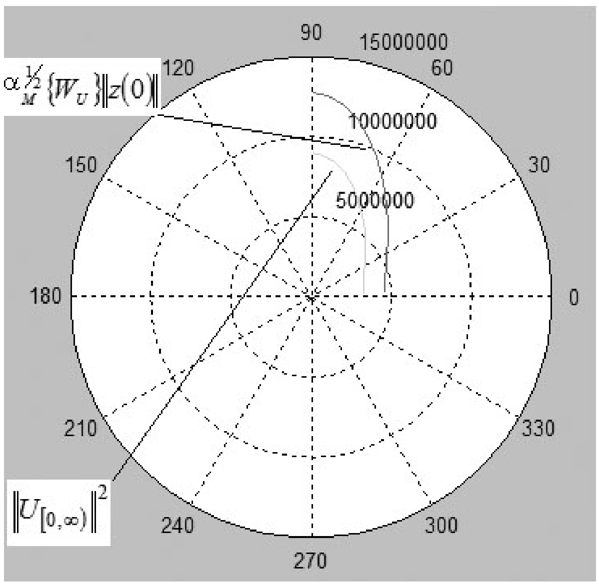

Рисунок. Зависимость затрат на управление от сектора локализации желаемых мод

На рисунке представлена зависимость затрат на управление от сектора локализации желаемых мод. Видно, что в данном случае оптимальным с точки зрения затрат на управление является выбор мод в соответствии со стандартным полиномом Ньютона (в нулевом секторе локализации).

Заключение

В работе предложены алгоритмы формирования затрат на управление установившимся движением системы, порождаемого гармоническим экзогенным воздействием. Решение задачи построено на использовании экстремальных элементов алгебраического спектра сингулярных чисел грамиана затрат на управление. Тем не менее, авторы считают, что «тонкое» решение этой проблемы требует также исследования структуры элементов геометрического спектра левого сингулярного базиса этого грамиана.

Литература

1. Schneiders M. Using Gramian Theory for Actuator and Sensor Placement. – Technische Universitet Eindhoven, 2004.
2. Conley A., Salgado M. Gramian based interaction measure // Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. – 2000. – V. 5. – P. 5020–5022.
3. Sorensen D., Antoulas A. The Sylvester equation and approximate balanced reduction // Linear Algebra and its Applications. – 2002. – P. 671–700.
4. Краснощеченко В.И. Синтез управления в задаче быстродействия с использованием метода модельного прогнозируемого управления // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 10. – С. 2–8.
5. Бирюков Д.С., Слита О.В., Ушаков А.В. Грамианные технологии оценки затрат на управление в задаче обеспечения желаемой структуры мод и их робастности // Изв. вузов. Приборостроение. – 2009. – Т. 52. – № 11. – С. 32–37.
6. Бирюков Д.С., Ушаков А.В. Контроль затрат на управление при воспроизведении полиномиальных экзогенных воздействий: грамианный подход // Материалы конференции «Управление в технических системах УТС-2010». – СПб: Концерн ЦНИИ «Электроприбор». – 2010. – С. 56–60.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. – М.: Физматлит, 2004.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1996.
9. Ушаков А.В. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 10. – С. 72–82.

Бирюков Дмитрий Сергеевич – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, dbiryukov@list.ru

Ушаков Анатолий Владимирович – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, ushakov-AVG@yandex.ru