УДК 681.5

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Д.А. Музыка, Р.О. Пещеров, В.Ю. Тертычный-Даури

Рассмотрена задача формирования закона оптимального управления для нелинейных динамических систем с запаздыванием по времени в канале управления. В соответствии с принципом оптимальности обосновывается необходимое условие оптимальности (уравнение Беллмана) для систем с запаздыванием в канале по управлению. Выводы анализа подкрепляются результатами численного моделирования в задаче оптимальной стабилизации вращения твердого тела.

Ключевые слова: запаздывание в канале управления, оптимальное управление, принцип оптимальности, беллмановская оптимизация.

Введение

Основной поток публикаций по регулируемым динамическим системам с запаздыванием касается вопросов устойчивости и стабилизации изучаемых процессов (например, работы [1–4] и содержащаяся там библиография). Полученные результаты можно рассматривать как обобщение результатов теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в фазовой переменной.

В некоторых работах решены задачи с запаздыванием по управлению применительно к общей (но не оптимальной) адаптивной задаче управления с возмущениями [5–7]. Значительно более скромным выглядит список работ по оптимизации управляемых динамических систем с запаздыванием по управлению [1–3]. Данные публикации в основном посвящены принципу максимума с учетом эффекта запаздывания.

В настоящей работе, по-видимому, впервые ставится и решается задача синтеза оптимального управления в непрерывных динамических системах с запаздыванием в канале управления с использованием беллмановского оптимизационного подхода (метода динамического программирования). На рис. 1 условно изображена схема формируемой системы управления.

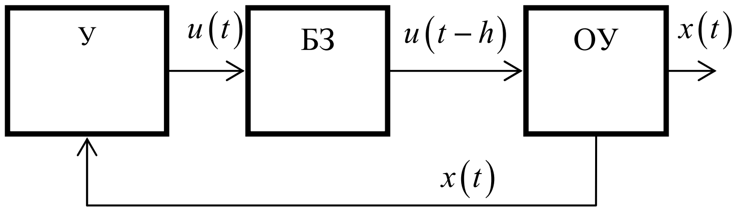

Рис. 1. Общая блок-схема системы управления с инерционным запаздыванием: ОУ – объект управления; БЗ – блок запаздывания; У – управление

Ставится основная цель – построить оптимальное управление объектом, которое бы решало задачу минимизации функционала качества в условиях запаздывания по управлению.

Постановка задачи

Пусть объект управления задается векторным уравнением

$$\dot{x} = f\left[x(t), u(t-h), t\right], \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$ – состояние системы в момент времени t, где $t \in [t_0\, t_1]$ – заданный интервал, $h = const > 0$ – запаздывание в управлении (так называемое инерционное запаздывание); при этом предполагается, что в самом объекте (1) запаздывания нет, но оно есть в регуляторе $u(t-h) \in R^n$. Интегрируя уравнение (1), получим равносильное ему векторное интегральное уравнение Вольтерра:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left[x(s), u(s-h), s\right] ds, \tag{2}$$

где $x_0 = x(t_0)$ – заданный вектор начального состояния системы. Уравнение (2) показывает, что $x(t)$ – состояние системы в момент времени t – зависит от значений управления $u(s-h)$ в предыдущие моменты времени $s-h$, где $t_0 < s < t (t_0 \geq 0,\ h > 0)$.

Далее, управление $u(\theta) \in R^n$ входит в уравнения (1)–(2) в виде значения $u(\theta)$ в запаздывающий момент времени $\theta = s - h$, где $h > 0$. При малых $s > t_0$ запаздывающий момент $\theta = s - h$ может оказаться отрицательным. В связи с этим, чтобы подынтегральное выражение в уравнении (2) имело смысл, управление $u(t)$ следует задавать и при отрицательных t, а именно при $t \in \left[t_0 - h, 0\right]$, когда $t_0 < h$. Таким образом, управление $u(t)$ надо задавать на более широком интервале времени $t \in \left[t_0 - h, t_1\right]$, причем состояние $x(t)$ должно быть определено на более узком интервале времени $t \in \left[t_0, t_1\right]$.

Будем считать, что на управляющие силы $u \in R^n$ наложены некоторые ограничения: $u \in U \subset R^r$, где U – некоторое заданное множество допустимых управлений. Требуется выбором управления $u(t),\ t \in \left[t_0 - h, t_1\right]$ обеспечить минимум функционала качества

$$J = V\left(x(t_1), t_1\right) + \int_{t_0}^{t_1} F\left[x(s), u(s-h), s\right] ds \to \min_{u \in U} \tag{3}$$

и перевести систему (1) из начального состояния $x(t_0)$ в конечное $x(t_1)$. Полагаем, что в системе (1) с функционалом (3) вектор-функция f и скалярные функции V, F непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам.

Напомним, что принцип оптимальности Беллмана, лежащий в основе метода динамического программирования, применим для систем, последующее движение которых полностью определяется состоянием этих систем в любой текущий момент времени [1]. Согласно Беллману, оптимальная стратегия определяется только начальным условием и конечной целью, т.е. принцип оптимальности утверждает, что для любого первоначального состояния и стратегии (управления) в начальный момент последующие стратегии должны составлять оптимальное движение относительно состояния, полученного в результате применения начальной стратегии. Указанная формулировка принципа оптимальности останется справедливой и для систем с запаздыванием, если в понятие состояния системы в текущий момент времени t' включить и предысторию изменения фазовых координат системы на промежутке времени последействия: $t' - h < t < t'$.

Отметим также, что отличительной особенностью метода динамического программирования, использующего принцип оптимальности, является то, что отрезки оптимальной траектории определяются в обратной последовательности, начиная с заданного конечного (целевого) состояния $x(t_1)$.

Необходимое условие оптимальности

Принцип оптимальности Беллмана позволяет сформулировать необходимое условие оптимальности для динамических систем с последействием по управлению вида (1) с функционалом качества (3).

Допустим, что $x^0(t)$ – оптимальная траектория системы (1) с заданным начальным $x(t_0)$ и конечным состоянием $x(t_1)$. Требуется перевести систему (1) из векторной точки $x(t_0)$ в векторную точку $x(t_1)$ по траектории $x^0(t)$, выбрав оптимальное управление $u^0(t-h)$, минимизирующее функционал (3). Можно показать, что функционал качества (3) с запаздыванием по времени в управлении можно подходящим функциональным преобразованием свести к функционалу с управлением без запаздывания по времени, но с запаздыванием по индексу [3]. Тем самым возникает возможность использовать стандартные оптимизационные процедуры метода динамического программирования и к системам с запаздыванием по управлению.

Теорема. Пусть поставлена задача синтеза оптимального управления для системы (1) с функционалом (3) с оговоренными выше требованиями непрерывности и гладкости для всех входящих скалярных функций и вектор-функций.

Тогда, если $x^0(t)$ – оптимальная траектория системы (1) с заданными значениями $x(t_0)$ и $x(t_1)$, оптимальное управление $u^0(t-h)$ удовлетворяет уравнение Беллмана (уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана) вида

$$\min_{u\in U}\left\{\frac{dS\left(x^0(t),t\right)}{dt}+F\left[x^0(t),u(t-h),t\right]\right\}=0, \tag{4}$$

либо

$$\frac{dS\left(x^0(t),t\right)}{dt}+F\left[x^0(t),u^0(t-h),t\right]=0, \tag{5}$$

где обозначено

$$S\left(x^0(t),t\right)=V|_{t_1}+\min_{u\in U}\int_t^{t_1}F\left[x^0(s),u(s-h),s\right]ds, \tag{6}$$

причем

$$S\left(x^0(t_1),t_1\right)=V|_{t_1}=V\left(x(t_1),t_1\right), \tag{7}$$

а для подынтегральной функции $F(\cdot)$ имеет место равенство (5), (6).

Доказательство. Обозначим через $S\left(x^0(t_0),t_0\right)$ минимум функционала J (3). Из принципа оптимальности следует, что часть траектории с концами $x^0(t)$ (в начале при $t=t$) и $x^0(t_1)$ (в конце при $t=t_1$), удовлетворяющая уравнению (1), также оптимальна. Значит, минимальное значение порождаемого этой частью траектории функционала равно $S\left(x^0(t),t\right)$ (6) с граничным значением $S\left(x^0(t_1),t_1\right)=V|_{t_1}$ (7). Приходим тем самым к так называемому функциональному уравнению Беллмана (6).

Пусть $t'=t+\Delta t$, где Δt – достаточно малый интервал времени. Тогда минимальное значение функционала по части оптимальной траектории с начальным состоянием $x^0(t')=x^0(t+\Delta t)$ и конечным состоянием $x^0(t_1)$ определяется равенством

$$S\left(x^0(t'),t'\right)=V|_{t_1}+\min_{u\in U}\int_{t'}^{t_1}F\left[x^0(s),u(s-h),s\right]ds. \tag{8}$$

Разобьем интервал интегрирования на два: от t до $t'=t+\Delta t$ и от t' до t_1. Тогда, сравнивая интегралы (6) и (8), получим, что

$$S\left(x^0(t),t\right)=V|_{t_1}+\min_{u\in U}\left(\int_t^{t+\Delta t}F\left[x^0(s),u(s-h),s\right]ds+\int_{t+\Delta t}^{t_1}F\left[x^0(s),u(s-h),s\right]ds\right), \tag{9}$$

или с точностью до малых $\alpha_1(\Delta t)$ более высокого порядка, чем Δt, можно написать (с учетом оптимальности на втором интервале):

$$S\left(x^0(t),t\right)=V|_{t_1}+\min_{u\in U}\left(F\left[x^0(t),u(t-h),t\right]\Delta t+\min_{u\in U}\int_{t'}^{t_1}F\left[x^0(s),u(s-h),s\right]ds\right)+\alpha_1(\Delta t),$$

где с точностью до $\alpha_1(\Delta t)$ имеем в соотношении (9) для первого интеграла справа

$$\int_t^{t+\Delta t}F\left[x^0(s),u(s-h),s\right]ds=F\left[x^0(t),u(t-h),t\right]\Delta t+\alpha_1(\Delta t),$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\alpha_1(\Delta t)}{\Delta t}=0.$$

Таким образом, имеем запись

$$S\left(x^0(t),t\right)=\min_{u\in U}\left\{F\left[x^0(t),u(t-h),t\right]\Delta t+S\left(x^0(t'),t'\right)\right\}+\alpha_1(\Delta t).\tag{10}$$

Пусть, ради простоты записи, $x(t)=x^0(t)$. Тогда, разлагая $x(t')$ в ряд Тейлора, получим

$$x(t')=x(t+\Delta t)=x(t)+\dot{x}(t)\Delta t+\alpha_2(\Delta t)=x(t)+f\left[x(t),u(t-h),t\right]\Delta t+\alpha_2(\Delta t),\tag{11}$$

где $\alpha_2(\Delta t)$ – остаточный член выше первого порядка малости от Δt. Подставим это разложение $x(t')$ (11) в выражение для $S\left(x(t'),t'\right)$. При соответствующем разложении в ряд Тейлора, полагая при этом, что существуют частные производные $\partial S/\partial x_i$, $i=\overline{1,n}$, и $\partial S/\partial t$, получим

$$S\left(x(t'),t'\right)=S\left[x(t+\Delta t),t+\Delta t\right]=S\left\{x(t)+f\left[x(t),u(t-h),t\right]\Delta t+\alpha_2(\Delta t),t+\Delta t\right\}=$$

$$=S\left(x(t),t\right)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial S\left(x(t),t\right)}{\partial x_i}f_i\left[x(t),u(t-h),t\right]\Delta t+\frac{\partial S\left(x(t),t\right)}{\partial t}\Delta t+\alpha_3(\Delta t),\tag{12}$$

где $\alpha_3(\Delta t)$ – это остаточный член выше первого порядка малости по Δt, причем здесь

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial S\left(x(t),t\right)}{\partial x_i}f_i\left[x(t),u(t-h),t\right]+\frac{\partial S\left(x(t),t\right)}{\partial t}=\frac{dS\left(x(t),t\right)}{dt},$$

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\left(\frac{\partial S}{\partial x_1},\frac{\partial S}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)^*=\mathrm{grad}S,$$

(*) сверху по-прежнему означает операцию транспонирования. Следовательно, для $S\left(x(t'),t'\right)$ имеем

$$S\left(x(t'),t'\right)=S\left(x(t),t\right)+\left(\frac{\partial S\left(x(t),t\right)}{\partial x}\right)^*f\left[x(t),u(t-h),t\right]\Delta t+\frac{\partial S\left(x(t),t\right)}{\partial t}\Delta t+\alpha_3(\Delta t).\tag{13}$$

Подставим затем выражение (13) в правую часть соотношения (10), полагая $x(t)=x^0(t)$. Поскольку выражения $S\left(x(t),t\right)$ и $\partial S/\partial t$ не зависят от $u(\cdot)=u(t-h)$, то их можно вынести за знак $\min\limits_{u\in U}$. После сокращения и деления обеих частей на Δt получим

$$-\frac{\partial S\left(x^0(t),t\right)}{\partial t}=\min_{u\in U}\left\{\left(\frac{\partial S\left(x^0(t),t\right)}{\partial x^0}\right)^*f\left[x^0(t),u(t-h),t\right]+F\left[x^0(t),u(t-h),t\right]\right\}+\frac{\alpha_4(\Delta t)}{\Delta t},\tag{14}$$

где $\alpha_4(\Delta t)$ – остаточный член выше первого порядка малости по Δt, т.е. $\alpha_4(\Delta t)/\Delta t\to 0$ при $\Delta t\to 0$.

При $\Delta t\to 0$ из уравнения (14) получим уравнение Беллмана для управляемых систем с запаздыванием в управлении:

$$-\frac{\partial S\left(x^0(t),t\right)}{\partial t}=\min_{u\in U}\left\{\left(\frac{\partial S\left(x^0(t),t\right)}{\partial x^0}\right)^*f\left[x^0(t),u(t-h),t\right]+F\left[x^0(t),u(t-h),t\right]\right\},\tag{15}$$

либо

$$-\frac{\partial S\left(x^0(t),t\right)}{\partial t}=\left(\frac{\partial S\left(x^0(t),t\right)}{\partial x^0}\right)^*f\left[x^0(t),u^0(t-h),t\right]+F\left[x^0(t),u^0(t-h),t\right].\tag{16}$$

С помощью полной производной dS/dt последние два уравнения (15) и (16) можно записать в виде соотношений (4) и (5) соответственно из формулировки теоремы. Тем самым утверждение полностью доказано.

Модельный пример

В качестве простейшего модельного примера можно взять управляемую линейную систему с уравнением движения

$$\dot{x}(t) = x(t) + u\left[x(t), x_p(t), t-h\right], \quad x, x_p \in R,$$

с целевым функционалом качества вида (3):

$$J = V\left(y(t_1)\right) + \int_{t_0}^{t_1}\left(V\left(y(s)\right) + u^2(s-h)\right)ds \to \min_{u\in U},$$

где $V\left(y(t)\right) = y^2(t)$ – функция Беллмана, $u(t-h) = u\left[x(t), x_p(t), t-h\right]$, $y(t) = x(t) - x_p(t)$, $x_p(t)$ – программное движение системы, и стабилизационным условием $\lim_{t\to t_1}\left|x(t) - x_p(t)\right| < \delta$, где $\delta > 0$ – заданная достаточно малая постоянная. Применяя описанный выше метод оптимальной стабилизации с помощью теоремы, получим необходимое условие оптимальности в виде уравнения Беллмана

$$\min_{u\in U}\left(\dot{V}(y) + y^2 + u^2\right) = 0.$$

С учетом исходного уравнения движения $\dot{y} = \dot{x} - \dot{x}_p = x + u - \dot{x}_p$ это уравнение можно записать в развернутом виде:

$$\frac{\partial V}{\partial y}\left(x - \dot{x}_p\right) + y^2 + \min_{u\in U}\left(\frac{\partial V}{\partial y}u + u^2\right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2y,$$

откуда следует формула для выбора оптимального управления

$$u^0(t-h) = u^0\left[x(t), x_p(t), t-h\right] = -y(t) = -\left(x(t) - x_p(t)\right).$$

После подстановки u^0 в уравнение движения получим

$$\dot{x} = x_p,$$

а при подстановке u^0 в уравнение Беллмана будем иметь

$$2y\left(x - \dot{x}_p\right) + y^2 - 2y^2 + y^2 = 0,$$

или $2y\left(x - \dot{x}_p\right) = 0$. Чтобы уравнение Беллмана имело место, выберем $x_p(t)$, полагая $x - \dot{x}_p = 0$.

Таким образом, приходим к системе двух уравнений первого порядка относительно $x(t)$ и $x_p(t)$:

$$\dot{x} = x_p, \quad \dot{x}_p = x.$$

Очевидно, что эта система равносильна системе двух уравнений второго порядка

$$\ddot{x}_p = x_p, \quad \ddot{x} = x$$

с общими решениями

$$x_p(t) = C_1 e^{t-t_0} + C_2 e^{-(t-t_0)}, \quad x(t) = C_1 e^{t-t_0} - C_2 e^{-(t-t_0)},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Выбирая начальные условия

$$x_p(t_0) = C_1 + C_2 = \dot{x}(t_0), \quad \dot{x}_p(t_0) = C_1 - C_2 = x(t_0)$$

так, чтобы $C_1 = 0$, т.е.

$$x_p(t_0) = C_2 = \dot{x}(t_0), \quad x(t_0) = -C_2 = \dot{x}_p(t_0)$$

(это обеспечивается выбором программной траектории $x_p(t) = C_2 e^{-(t-t_0)}$, $t \in \left[t_0, t_1\right]$), придем к задаче оптимального торможения или, в противном случае, т.е. когда $C_1 \neq 0$, к задаче оптимального разгона движения исходного объекта управления.

Оптимальная стабилизация вращения твердого тела

В качестве примера синтеза оптимального управления рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижного центра инерции под действием управляющего момента M:

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = M, \qquad (17)$$

либо в скалярной форме

$$A\dot{p} + (C-B)qr = M_x, \; B\dot{q} + (A-C)pr = M_y, \; C\dot{r} + (B-A)pq = M_z,$$

Здесь A, B, C – главные центральные моменты инерции тела; p, q, r – проекции вектора угловой скорости ω твердого тела на главные центральные оси инерции связанной с телом системы координат $0xyz$, $I = diag(A, B, C)$ – тензор инерции. Уравнения Эйлера (17) можно записать в нормальном виде:

$$\dot{\omega} = -I^{-1}\left(\omega \times I\omega\right) + u,\ u = I^{-1}M,$$

или

$$\dot{p} = k_1 qr + u_1, q = k_2 pr + u_2, \dot{r} = k_3 pq + u_3,$$

где обозначено

$$u_p = \frac{M_x}{A},\ u_q = \frac{M_y}{B},\ u_r = \frac{M_z}{C},\ k_1 = \frac{B-C}{A},\ k_2 = \frac{C-A}{B},\ k_3 = \frac{A-B}{C}.$$

Тем самым имеем

$$\dot{\omega} = f\left(\omega\right) + u, \tag{18}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},\quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\quad f\left(\omega\right) = \begin{pmatrix} k_1 qr \\ k_2 pr \\ k_3 pq \end{pmatrix}.$$

Зададим также программную траекторию

$$\dot{\omega}_p = f\left(\omega_p\right).$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $y = \omega - \omega_p$, где $\omega_p = \omega_p\left(t\right)$ – программное движение. Цель управления – минимизация разницы между движением системы и программной траекторией. Необходимо выбрать закон оптимального стабилизирующего управления u^0 в функции измеряемых значений $\omega\left(t\right), t \in \left[t_0, t_1\right]$ так, чтобы обеспечивались следующие целевые условия:

$$J\left(u, y, t_0, t_1\right) = y^* y\Big|_{t=t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(y^* y + u^* u\right)dt \to \min_{u \in U},\ \lim_{t \to t_1}\left(\frac{y\left(t\right)}{y\left(t_0\right)}\right) < \delta, \tag{19}$$

где $\delta > 0$ – заданная малая постоянная, а $\left\|y\left(t\right)\right\|$ – евклидова норма вектора $y\left(t\right)$. Для решения задачи (17)–(19) воспользуемся полученными ранее результатами. Зададим стационарную функцию Беллмана

$$V\left(y\right) = y^* y,\ V\big|_{t_1} = y^* y\big|_{t=t_1}$$

как решение уравнения Беллмана (4):

$$\min_{u \in U}\left(\dot{V}\left(y\right) + V\left(y\right) + u^* u\right) = 0, \tag{20}$$

с функционалом качества (19). С учетом выражения (18) выражение (20) запишется в виде

$$2y^* f\left(y\right) + y^* y + \min_{u \in U}\left(2y^* u + u^* u\right) = 0, \tag{21}$$

откуда будет следовать формула задания оптимального управления: $u_0 = -y$. При таком значении управления уравнение движения примет следующий вид:

$$\dot{y} + y = F\left(\omega, t\right),\quad F\left(\omega, t\right) = f\left(\omega, t\right) - \dot{\omega}_p,$$

или

$$\dot{\omega} - \dot{\omega}_p + \omega - \omega_p = f\left(\omega, t\right) - \dot{\omega}_p.$$

Если положить $F\left(\omega, t\right) = 0$, то $V\left(y\right) = y^* y \to 0\ \ \left(t \to \infty\right)$, откуда следует, что $y \to 0$, $\omega \to \omega_p$ $\left(t \to \infty\right)$. Таким образом, имеем ограничение на выбор ω_p: $F\left(\omega, t\right) = 0 \leftrightarrow \dot{\omega}_p = f\left(\omega, t\right)$, где $\omega\left(t_0\right) \neq \omega_p\left(t_0\right)$, т.е. $y_0 \neq 0$, $y\left(t\right) = y\left(t_0\right)e^{-\left(t - t_0\right)}$. Подставляя это выражение, получим дифференциальное уравнение для определения $\omega_p\left(t\right)$:

$$\dot{\omega}_p\left(t\right) = f\left(\omega_p\left(t\right) + y\left(t_0\right)e^{-\left(t - t_0\right)}, t\right).$$

Приведем данные численных расчетов для модели (17)–(19). В примере задавались следующие значения: главных моментов инерции: $A = 3$ кг·м²; $B = 1$ кг·м²; $C = 2$ кг·м²; $\left[t_0, t_1\right] = \left[0, 10\right]$с; $p\left(0\right) = 5$ рад/с; $q\left(0\right) = 6$ рад/с; $r\left(0\right) = 7$ рад/с; $\delta = 0{,}05$.

После подстановки $u^0 = -y$ обратно в уравнение Беллмана (20), (21) получим

$$\dot{V} = -2V,\quad V = y^* y \to 0,\quad y \to 0,$$

при $t \to \infty$ по экспоненциальному закону. Из графиков видно, что цель управления достигнута и произведена стабилизация вращения твердого тела. При данном оптимальном управлении u^0 функционал качества J принимает минимальное постоянное значение $J = V\left(t_0\right) = y^*\left(t_0\right)y\left(t_0\right) = 110$ (рад/с)², где $y^*\left(t_0\right) = (5,6,7)$ рад/с.

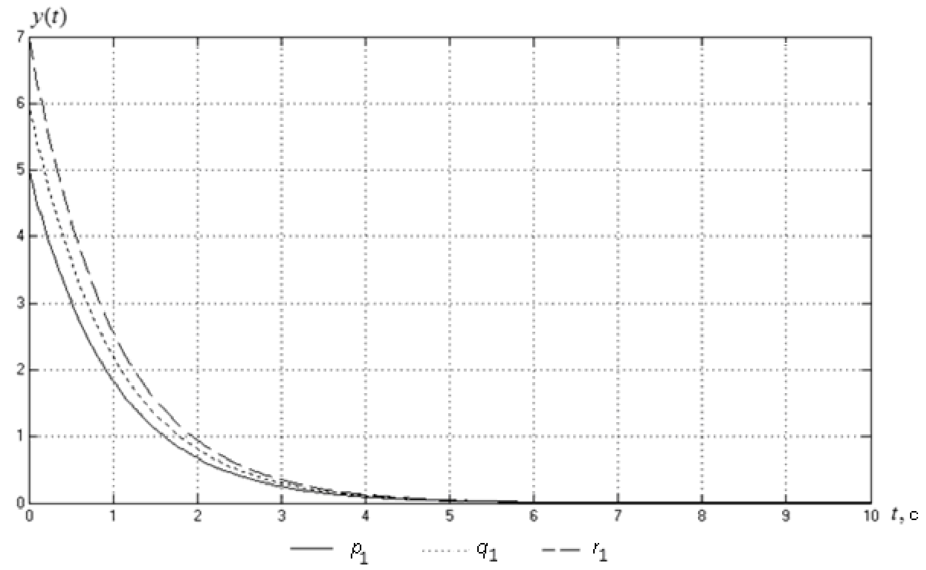

Рис. 2. Графики зависимостей угловых скоростей вращения твердого тела;
$y(t)=\omega(t)-\omega_p(t)=(p_1(t),q_1(t),r_1(t))$

Заключение

Основным результатом проделанной работы следует считать формирование алгоритма оптимального стабилизирующего управления для нелинейных динамических систем с запаздыванием в канале обратной связи. Отметим важные особенности данного алгоритма:

1. Уравнение Беллмана (4) обосновано в той степени, в которой имеют место требования гладкости функции Беллмана, т.е. в той мере, в которой справедливо допущение о существовании частных производных $\partial S/\partial x$, $\partial S/\partial t$ функции $S(x(t),t)$;
2. Уравнение Беллмана (4) позволяет выразить оптимальное управление $u^0=u^0(t-h)$ в момент времени $t-h$ в функции вектора состояния $x(t)$ в момент времени t и самого времени t. Отметим, что формирование блока запаздывания (рис. 1), указывающего на зависимость между управлениями $u^0(t)$, $u^0(t-h)$, является самостоятельной задачей и в данной статье не рассматривается.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 508 с.
2. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. – СПб: Изд-во СПбГУ, 2003. – 540 с.
4. Тертычный-Даури В.Ю. Галамех. Оптимальная механика. В 4-х томах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – Т. 4. – 607 с.
5. Бобцов А.А., Пыркин А.А. К задаче управления параметрически неопределенным линейным объектом с запаздыванием в канале управления // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2011. – № 3 (73). – С. 138.
6. Бобцов А.А., Пыркин А.А. Компенсация гармонического возмущения в условиях запаздывания по управлению // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 4. – С. 19–23.
7. Бобцов А.А., Колюбин С.А., Пыркин А.А. Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 11. – С. 136–148.

Музыка Дмитрий Александрович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, магистрант, 146038@niuitmo.ru

Пещеров Руслан Олегович – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, магистрант, rpeshcherov@mail.ru

Тертычный-Даури Владимир Юрьевич – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор физ.-мат. наук, профессор, tertychny-dauri@mail.ru